Wichtige Aspekte des Vektorbegriffes

S. Grosser, Wien

Zum Begriff des Vektors bzw. dem des Vektorraumes liegt eine sehr umfangreiche Literatur vor. Für rein mathematische Zwecke erscheint das Instrumentarium der Linearen Algebra - Vektoren, Matrizen, Operatoren und Formen - vorderhand so hervorragend geeignet, daß wahrscheinlich nur ein neuer Entwicklungsschub innerhalb der Mathematik zu einer Revision der gängigen Begriffsbildungen führen könnte. Trotzdem ist die didaktische Rezeption des Vektorbegriffs noch nicht bis zu einem befriedigenden Punkt gediehen. Der Grund dafür liegt wohl einerseits in der Mehrfachbelegung des Begriffs, in seiner historisch bedingten Vielschichtigkeit im Sinne der Anwendungen (innerhalb und außerhalb der Mathematik), andererseits aber auch in der Vielschichtigkeit des mathematischen Isomorphie- bzw. Modellbegriffs, besonders im Zusammenhang mit der Verwendung von Äquivalenzrelationen.

Im Folgenden werden in kompakter Weise einige dieser Aspekte skizziert, deren Kenntnis beim Versuch der schulischen Vermittlung als ausreichendes Hintergrundwissen auf Seiten des AHS- und BHS-Lehrers anzusehen wäre. Hierbei muß sowohl auf die innermathematische Vielschichtigkeit (Tangentialräume von Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder) als auch auf die gängigen physikalischen Anwendungen (Ortsvektoren, freie Vektoren, linienflüchtige

Vektoren) kurz eingegangen werden. Eine resultierende These ist die, daß für die Schulmathematik die Begriffsgleichung "Vektor = Punkt eines Vektorraumes" sowie "Vektor = gerichtete Strecke (in einem Vektorraum)" gleichzeitig gelten und in didaktisch ansprechender Weise vermittelt werden sollte; ferner die These, daß eine solche Vermittlung möglich ist. Geradezu selbstverständlich ist, daß als Ausgangspunkt der Diskussion der Strukturbegriff "Vektorraum" dient.

§ 1. Der axiomatische Vektorbegriff

Unter einem Vektorraum V über dem Körper K versteht man bekanntlich ein Tripel $(V,+,\Delta)$, wo $+: V \times V \to V$, $\Delta: K \times V \to V$ die Vektoraddition bzw. Skalarmultiplikation bedeutet und die üblichen Eigenschaften dieser Operationen vorliegen. Als Beispiele seien erwähnt: $(\mathbb{R}^n,+,\Delta)$; $(K^n,+,\Delta)$ = Vektorraum der n-Tupel über K; $(K_n[x],+,\Delta)$ = Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ über K; $(\mathfrak{J}_c([a,b]),+,\Delta)$ = Vektorraum der stetigen Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$; schließlich der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Lösungen der Differentialgleichung $y'' - 2y' + y = 0$ u.a.m.

Wir halten formell die im strukturmathematischen Sinn einzig "richtige" Definition des Vektorbegriffs fest:

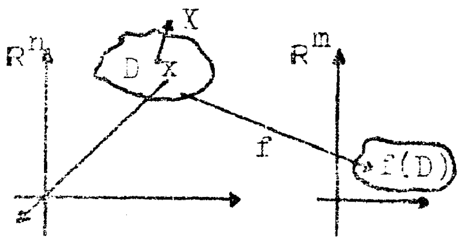
DN 1 Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes.
Überprüft man diese Definition anhand der zitierten Beispiele, so sieht man sofort, daß nicht einmal den Elementen $x = (x_1,\ldots,x_n)$ des n-Tupelraumes K^n die "gewohnte" Eigenschaft "Vektor = gerichtete Strecke" zukommt, es sei denn, man deutet x als den Endpunkt der Strecke $\overrightarrow{\sigma x}$, wo $\sigma = (0,\ldots,0)$ der Nullvektor ist, was die Identifikation von x als Ortsvektor ergibt.

§ 2. Einige mathematische Gründe für die Erweiterung des Vektorbegriffs

Da die Schulmathematik im Sinne des "intentionalen Unterrichts" nicht den "höheren Standpunkt" gänzlich ignorieren kann, besteht die Notwendigkeit, auch einen Blick auf den erweiterten Vektorbegriff der Universitätsmathematik zu werfen.

Für Funktionen $f\colon D \subseteq R^n \to R^m$, wo D eine (offene) Teilmenge von R^n bedeutet ist die <u>Richtungsableitung</u> im Punkt $x \in D$ in Richtung eines in x affichierten Vektors X durch

$$(D_X f)(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,[\,f(x+tX) - f(x)]$$

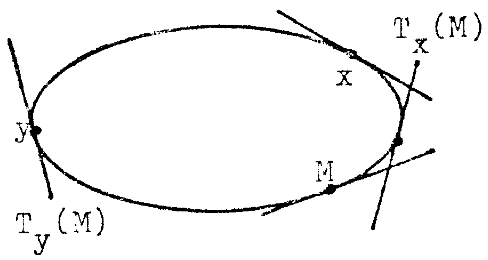


(Richtungsableitung)

definiert; das ist die Änderung von f pro Längeneinheit in x, in Richtung X gemessen. Für diese Definition benötigt man also einen Vektor X, der in x seinen Anfangspunkt hat; die Menge dieser X bildet den <u>Tangentialraum</u> $T_x(D) = T_x(R^n)$ von D im Punkt x, den man sich als eine nach x verschobene Kopie des R^n denken kann. In der obigen Formel wird aber die Linearkombination $x + tX$ betrachtet, die durch Berechnung in R^n, nicht in $T_x(D)$, entsteht. Voraussetzung für die Definition von $D_X f(x)$ (die vor allem auch aus physikalischen Erwägungen motiviert ist) ist also die Interpretation von X als <u>gerichtete Strecke</u> im R^n. Mit der <u>Ableitung</u>

$Df(x)$ von f in x, einer linearen Funktion $T_x(R^n) \to T_{f(x)}(R^m)$ ist $D_X f$ durch die Formel $(Df)(x)(X) = (D_X f)(x)$ verknüpft, so daß für die Beschreibung von $Df(x)$ die obigen Vektoroperationen und -deutungen eine Rolle spielen.

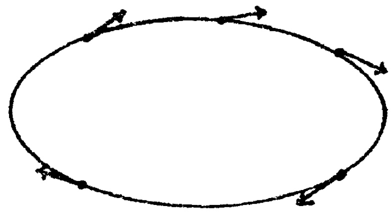
In verstärktem Maße gelten diese Behauptungen für <u>Mannigfaltigkeiten</u>. So sei z.B. M eine Ellipse und $x \in M$. Der <u>Tangentialraum</u> $T_x(M)$ ist die Tangente (im gewöhnlchen Sinne) an x in R^2 und das <u>Tangentenbündel</u> $T(M)$ von M ist die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in M} T_x(M)$. Für diese eindimensionale Mannigfaltigkeit M ist jedes $T_x(M)$ eine Kopie von R^1, die man sich als in x angeheftet vorstellt. Ebenso ist (um bei einfachen Beispielen zu bleiben) für ein Ellipsoid M und $x \in M$ der Tangentialraum $T_x(M)$ eine in x angeheftete Ebene im R^3 etc.



(Tangentialräume)

Analog basieren für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M Berechnungen in $T_x(M)$ auf den gewöhnlichen Vektoroperationen des R^n, auf Ortsvektoren im Sinne von § 1 ausgeführt.

Ein <u>Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M</u> ist einfach eine Zuordnung $x \mapsto v_x$, wo $v_x \in T_x(M)$: in jedem Punkt x von M wird also ein Vektor v_x im Tangentialraum $T_x(M)$ ausgewählt (wobei zumeist noch Stetigkeits- oder Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gelten).

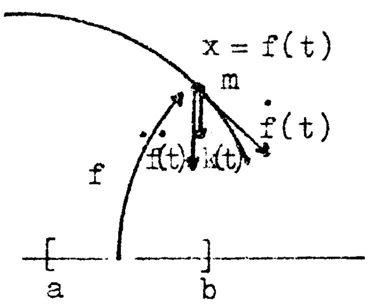


(Vektorfeld auf eindimensionaler Mannigfaltigkeit)

Diese kurzen Erörterungen machen es plausibel, daß für die angemessene Beschreibung der erwähnten Sachverhalte ein flexibler Vektorbegriff, gepaart mit einer Vielzahl von Modellen desselben Vektorraumes, zur Verfügung stehen muß.

§ 3. Bemerkungen zu physikalischen Vektorbegriffen

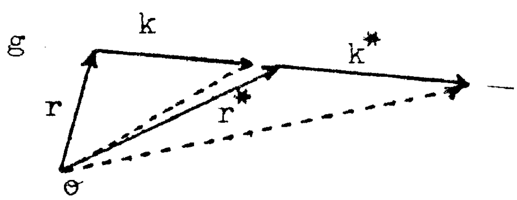
Bei der Beschreibung gewisser physikalischer Phänomene (ebene konstante Strömung, konstanter Wind, etc.) tritt der "freie" Vektor als Pfeilklasse auf. Anders ist die Situation etwa bei der Bewegung einer Punktmasse m entlang einer Kurve $x = f(t)$, wo $f: [a,b] \subset R \to R^3$. Die Geschwindigkeit $\dot{f}(t)$, Beschleunigung $\ddot{f}(t)$ und die auf m einwirkende Kraft $k(t)$ sind als von x ausgehende Ortsvektoren vorstellbar, die in einer in x angehefteten Kopie des R^3 liegen.



Nur $\dot{f}(t)$ liegt im Tangentialraum $T_x(M)$ der durch f unter gewissen Voraussetzungen definierten eindimensionalen Mannigfaltigkeit; $\ddot{f}(t)$ und $k(t)$, wo $k(t) = m\,\ddot{f}(t)$, gehören zum Tangentialraum $T_x(R^3)$.

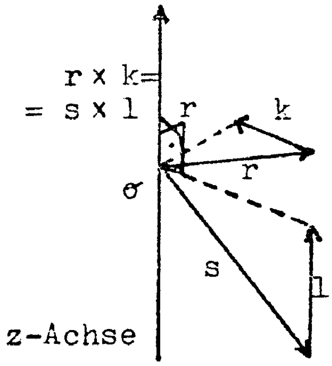
Analog werden bei der Beschreibung von physikalischen Kraftfeldern (elektrostatische, magnetische, etc.) Ortsvektoren aus dem jeweiligen Tangentialraum, insgesamt also Vektorfelder im Sinne von § 2 verwendet; und die Superimposition von Feldern (in den linearen Feldtheorien) läuft wieder auf Addition von Ortsvektoren im jeweiligen Tangentialraum hinaus.

Eine interessante Modellbildung resultiert aus der Betrachtung von Drehmomenten. Die Kraft k erzeugt in σ bezüglich des Kraftarms r das Drehmoment $r \times k$. Wird k längs der Geraden g verschoben, so resultiert das Drehmoment $r^* \times k^*$. Da aber $r^* - r = ck$, wo $c \in \mathbb{R}$, gilt $r^* \times k^* = r \times k$, wobei in $\mathbb{R}^2$ mit Nullpunkt σ unter Verwendung der Identifikation $k = k^*$ gerechnet wurde. Da sich k also längs g beliebig verschieben läßt, ohne daß sich das Drehmoment bezüglich σ ändert, spricht man von einem <u>linienflüchtigen</u> Vektor. Nun ist aber $k \times r$ andererseits einfach ein in Richtung der z-Achse von σ ausgehender Vektor, und jeder solche Vektor $(0,0,d)$ läßt sich als $de_1 \times e_2$ mit $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, das heißt, als ebenes Drehmoment darstellen. Man repräsentiere nun $r \times k$ als das von r und k bezüglich σ aufgespannte Dreieck und nenne es äquivalent zu dem von s und l aufgespannten, wenn $r \times k = s \times l$. Die obigen Überlegungen zeigen, daß die Menge der Äquivalenzklassen dieser (flächengleichen) Dreiecke ein Modell für $\mathbb{R}$ (repräsentiert durch die z-Achse) ist.



(linienflüchtiger Vektor)

Bei räumlichen Drehmomenten ist die Lage komplizierter; ihre Äquivalenzklassen entsprechen einem R^3. (Der Exponent 3 resultiert nicht von einem Druckfehler, sondern, wenn man es so sehen will aus der Tatsache, daß der R^3 mit x eine einfache Lie-Algebra ist!).



(Drehmomente)

§ 4. Das schulmathematische Minimalprogramm

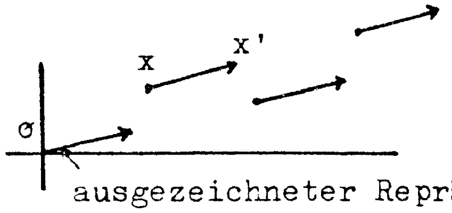
Diese skizzenhaften Überlegungen legen nahe, daß die folgende Definition (für n=1,2,3) zu produzieren ist:

DN 4 Ein Vektor im R^n ist eine Äquivalenzklasse von gleich langen, orientierten Strecken.

Damit diese Definition den Namen einer solchen verdient, müssen ihr zwei andere vorangestellt werden, nämlich:

DN 2 Eine gerichtete Strecke mit Anfangspunkt x und Endpunkt x' ist das geordnete Paar $(x,x') \in R^n \times R^n$.

DN 3 $(x,x') \sim (y,y') :\Leftrightarrow x' - x = y' - y$. (Skizze!)



ausgezeichneter Repräsentant
(Vektor als Pfeilklasse)

Es ist einfach zu sehen, daß ~ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ darstellt. Was aber ist die Familie $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)/\sim$ der Äquivalenzklassen?

<u>SATZ</u> $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)/\sim$ wird durch $(x,x') \mapsto x' - x$ bijektiv auf $\mathbb{R}^n$ abgebildet.

<u>BW</u> Es genügt ein Blick auf die letzte Skizze.

Somit hat sich die essentielle Übereinstimmung der beiden Vektordefinitionen (DN 1 = "Ortsvektor" = "Pfeilklasse" = DN 4) modulo der Wahl des Modells herausgestellt, wobei man mit Pfeilklassen so rechnet, wie man es immer schon getan hat bzw. tun wollte d.h., indem man die Klasse von (x,x') durch den Ortsvektor $x' - x$ repräsentiert.

Die zuletzt dargestellte exakte Fassung des Definitionsproblems kann im Unterricht zumindest durch ansprechende Zeichnungen verdeutlicht werden; die inhaltlichen Ingredienzen - "geordnetes Paar", "Äquivalenzrelation", "bijektive Abbildung" - gehören ja zum Schulstoff und treten hier in anspruchslosem Gewande auf. Abschließend sei festgestellt, daß durch ein solches Vorgehen sowohl der Spiraltheorie in bezug auf die höhere Mathematik als auch den Grundsätzen des fächerübergreifenden Unterrichts (in bezug auf die Physik und Chemie) Rechnung getragen wird.

Suum cuique!